INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS 1984

Options M, P, T MATHEMATIQUES

*Le sujet comporte trois problèmes indépendants.*

**PROBLEME n° 1**

On donne une fonction numérique f définie continue sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs et qui vérifie les conditions suivantes :

(1) pour tout x strictement positif on a : $0 < f(x) < x$

(2) f admet, pour x voisin de 0 et positif, un développement limité de la forme :

$$f(x) = x - ax^{1+h}(1 + \varepsilon(x))$$

où a et h sont des réels donnés strictement positifs et $\varepsilon$ est une fonction réelle de la variable positive x qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

On considère une suite réelle récurrente définie par : $u_0$ , nombre donné strictement positif, et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) Etudier la convergence de cette suite de terme général $u_n$. En déduire le comportement de la suite de terme général $u_n^\alpha$ suivant les valeurs du réel $\alpha$.

2°) En prenant $u_n$ comme infiniment petit principal, calculer la partie principale de $v_n$, où $v_n = \text{Log}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , quand n tend vers l'infini.

Donner par ailleurs la nature de la série de terme général $v_n$.

3°) Pour $\alpha$ strictement positif, $u_n$ étant encore pris comme infiniment petit principal, calculer la partie principale de $w_n$ où $w_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$.

Quelle est d'autre part la nature de la série de terme général $w_n$ ?

4°) Déduire des questions précédentes la nature de la série de terme général $u_n^\beta$ , en discutant suivant les valeurs du réel $\beta$.

5°) Application : appliquer ce qui précède aux fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

a) $f(x) = \text{Arctg}\, x$

b) $f(x) = \text{Log}(1 + x)$

On vérifiera d'abord que f satisfait aux conditions imposées.

**PROBLEME n° 2**

*Le résultat de la première question peut être admis et appliqué aux questions suivantes.*

$\mathbb{R}$ désigne le corps des réels. Pour n entier donné supérieur ou égal à un, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire noté $(X|Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On posera $||X|| = \sqrt{(X|X)}$ et pour tout k de 1 à n on appellera $u_k$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la $k^{\text{ième}}$ égale à 1.

On appellera U la base constituée des vecteurs $u_k$.

.../...

1°) Soit $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe une et une seule base orthonormée $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

pour tout i de 1 à n : $e_i = t_{1i}\, v_1 + t_{2i}\, v_2 + \ldots + t_{ii}\, v_i$ où les $t_{ji}$ sont des réels (pour j de 1 à i) et $t_{ii}$ strictement positif.

2°) Soit G une matrice carrée d'ordre n dont l'élément de la $p^{\text{ième}}$ ligne et de la $q^{\text{ième}}$ colonne pourra être noté : $g_{pq}$, pour tout $(p, q) \in [1, n]^2$. On suppose que G est une matrice inversible.

Montrer qu'il existe un couple unique constitué d'une matrice $\Omega$ orthogonale et d'une matrice T triangulaire supérieure où tous les éléments diagonaux sont strictement positifs, tel que :

$G = \Omega\, T$ (On rappelle qu'une matrice est triangulaire supérieure si tous ses éléments situés en dessous de la diagonale sont nuls).

Indication : Soit $U = \{u_1, u_2 \ldots, u_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on considérera la base $\{e_1, e_2 \ldots, e_n\}$ définie par : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $e_k = g(u_k)$ où g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice G dans la base U et l'on appliquera le résultat de la première question.

3°) Montrer que G inversible se décompose aussi de façon unique en le produit $\Omega.D.T_1$, où $\Omega$ est matrice orthogonale, D matrice diagonale à éléments diagonaux tous strictement positifs et $T_1$ matrice triangulaire supérieure dans laquelle les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

4°) Appliquer la décomposition précédente au cas où $n = 2$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

**PROBLEME n° 3**

*La troisième question indépendante des deux premières peut être traitée séparément.*

Un espace affine réel $\mathcal{A}$ de dimension trois est supposé euclidien et muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par rapport auquel les coordonnées d'un point seront appelées x, y, z respectivement. On appellera $L_x$, $L_y$, $L_z$ les supports des axes de coordonnées et $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.

On donne un réel a strictement positif et on admet que, si $\theta$ et t sont des paramètres qui décrivent respectivement $[0, 2\pi[$ et $\mathbb{R}$, les équations :

$$(1) \qquad x = a\left(1 + t \sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \quad y = a\left(1 + t \sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, \quad z = a\, t \cos\frac{\theta}{2}$$

définissent une surface S.

1°) Montrer que $L_x$ est axe de symétrie de S et que S peut être considérée comme engendrée par une famille $\mathcal{F}$ de droites D. Pour une droite D de $\mathcal{F}$, on déterminera un vecteur directeur et le point de cote $z = 0$.

Quelle courbe décrit ce dernier point quand D décrit $\mathcal{F}$ ?

2°) A tout $\theta_0$ appartenant à $[0, \pi[$, on fait correspondre d'une part la droite $D_0$ associée à la valeur $\theta_0$ de $\theta$, d'autre part $D'_0$ associée à $\theta_0 + \pi$.

Montrer que $D_0$ et $D'_0$ appartiennent à un même plan affine contenant $L_z$ et que, sauf pour une valeur particulière de $\theta_0$, elles se rencontrent en un point $I_0$ de la droite d'équations affines cartésiennes $\begin{cases} x = a \\ y = z \end{cases}$ notée $\Delta$.

En déduire que toutes les droites de $\mathcal{F}$, sauf trois d'entre elles, rencontrent deux droites fixes de l'espace $\mathcal{A}$.

3°) On coupe S par le plan affine d'équation cartésienne : $z = a$. La courbe $\Gamma$ obtenue sera définie en coordonnées polaires par la représentation : $\theta \longmapsto \rho = f(\theta)$. Déterminer la fonction f et construire la courbe $\Gamma$ dans un système d'axes orthonormés.